Teoría de las Finanzas

Opciones Americanas

Alejandro Mosiño
Universidad de Guanajuato
v.2014

Introducción

Introducción (1/2)

Como hemos visto, una opción es americana si el propietario tiene la opción de ejercerla en cualquier momento dentro del intervalo $[0,t]$. Esto implica que la prima de una opción americana es, generalmente, más alta que la de una opción europea:

$$C^e \leq C^a \qquad \text{y} \qquad P^e \leq P^a$$

Introducción(1/2)

De hecho, consideremos una opción call americana suscrita sobre un activo subyacente que paga dividendos. Si la opción se ejerce antes del periodo T:

- Nos hacemos del activo subyacente y recibiremos todos los dividendos que este pague
- Deberemos pagar el precio de ejercicio, K, prematuramente. Esto implica que se pierden intereses por:

$$K(e^{r(T-t)}-1)$$

- Perdemos el seguro que implica la posesión del call en caso que $S(T)<K$.

Paridad call-put y otras desigualdades

Paridad call-put (1/5)

Recordemos que las opciones europeas obedecen la fórmula de paridad:

$$P^e + S = C^e + Ke^{rT}$$

Las opciones americanas no satisfacen esta fórmula, pero sí satisfacen algunas desigualdades.

Paridad call-put (2/5)

Teorema

Supongamos que el valor de algún activo es S, que la tasa de interés libre de riesgo es r, y que C^a y P^a son los valores de un call y un put americanos, respectivamente, suscritos sobre este activo. Si el precio de ejercicio es K y la fecha de expiración es T, entonces:

$$C^a + K \geq S + P^a$$

Demostración (Tarea).

Paridad call-put (3/5)

Teorema

Supongamos que el valor de algún activo es S, que la tasa de interés libre de riesgo es r, y que C^a y P^a son los valores de un call y un put americanos, respectivamente, suscritos sobre este activo. Si el precio de ejercicio es K y la fecha de expiración es T, entonces:

$$S + P^a \geq C^a + Ke^{-rT}$$

Demostración (Tarea).

Paridad call-put (4/5)

Combinamos ambos teoremas para encontrar que:

$$S - K \leq C^a - P^a \leq S - Ke^{-rT}$$

Paridad call-put (5/5)

Ejercicio

Supongamos que el precio de un activo es $\$36$ y que la tasa de interés libre de riesgo (con acumulación continua) es de 5.5%. Consideremos un call americano con vencimiento en 6 meses suscrito sobre este activo. El precio del call es de $\$2.03$ y su precio de vencimiento es de $\$37$. Calcula el rango de valores de no arbitraje para un put americano suscrito sobre el mismo activo subyacente y con el mismo precio de vencimiento.

Call americano vs. Call europeo si el subyacente no paga dividendos

Sabemos que $C^a \geq C^e$, pero:

Teorema

Sean C^a y C^e los precios de una opción americana y una opción europea, respectivamente, suscritos sobre el mismo activo subyacente. Si ambas opciones tienen el mismo precio y fecha de vencimiento y el activo subyacente no paga dividendos, entonces:

$$C^a = C^e$$

Demostración (Tarea).

Put americano que no paga dividendos (1/2)

Teorema

Consideremos un activo que no paga dividendos y cuyo precio es S. Un put americano suscrito sobre este activo, con precio de vencimiento K, fecha de vencimiento T, y precio P^a satisface:

$$(K - S)^+ \leq P^a \leq K$$

Demostración (Tarea).

Put americano que no paga dividendos (2/2)

Ejercicio

Consideremos un put americano con vencimiento en 12 meses. El put se suscribe sobre un activo que no paga dividendos, el cual tiene un precio de $\$15$. Si la tasa de interés libre de riesgo es de 3.25% anual y el precio de vencimiento de la opción es de $\$470$, ¿deberíamos ejercer la opción prematuramente?

Nota. Contrario a lo que sucede con los calls americanos, un put americano sí podría ejercerce antes de T.

Call americano que no paga dividendos

Teorema

Consideremos un activo que no paga dividendos y cuyo precio es S. Un call americano suscrito sobre este activo, con precio de vencimiento K, fecha de vencimiento T, y precio C^a satisface:

$$(S - Ke^{-rT})^+ \leq C^a < S$$

Demostración (Tarea).

Variables que determinan el precio de una opción americana

Variables que determinan el precio de una opción americana (1/3)

Teorema

Sean $C^a(T_i)$ y $P^a(T_i)$ los valores de una opción call americana y de una opción put americana, respectivamente, ambas con vencimiento en T_i. Supongamos que $T_1 < T_2$. Entonces:

$$C^a(T_1) \leq C^a(T_2)$$
$$P^a(T_1) \leq P^a(T_2)$$

Demostración (Tarea).

Variables que determinan el precio de una opción americana (2/3)

Teorema

Sean $C^a(K_i)$ y $P^a(K_i)$ los valores de una opción call americana y de una opción put americana, respectivamente, ambas con precio de vencimiento K_i. Supongamos que $K_1 < K_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} C^a(K_2) &\leq C^a(K_1) \\ P^a(K_1) &\leq P^a(K_2) \\ C^a(K_1) - C^a(K_2) &\leq K_2 - K_1 \\ P^a(K_2) - P^a(K_1) &\leq K_2 - K_1 \end{aligned}$$

Demostración (Tarea).

Variables que determinan el precio de una opción americana (3/3)

Teorema

Sean $C^a(S_i)$ y $P^a(S_i)$ los valores de una opción call americana y de una opción put americana, respectivamente, suscritas sobre un subyacente con precio S_i. Supongamos que $S_1 < S_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} C^a(S_1) &\leq C^a(S_2) \\ P^a(S_2) &\leq P^a(S_1) \\ C^a(S_2) - C^a(S_1) &\leq S_2 - S_1 \\ P^a(S_1) - P^a(S_2) &\leq S_2 - S_1 \end{aligned}$$

Demostración (Tarea).

El árbol binomial para valuar opciones americanas

Supuestos (1/2)

Como ejemplo, consideremos un put americano:

- Precio de vencimiento K
- Fecha de expiración en $T>0$
- Suscrito sobre un subyacente con precio $S(t)$ para $t \in [0, T]$.

Además, supongamos que la tasa de interés libre de riesgo, r, se acumula de forma continua y que el precio del subyacente evoluciona de acuerdo a un movimiento browniano geométrico con varianza σ^2.

Supuestos (1/2)

Usaremos la calibración:

- En cada nodo, el precio del subyacente puede aumentar o disminuir de acuerdo a los factores u y d, respectivamente:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} > 1$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} < 1$$

- El activo subyacente tiene una probabilidad de aumentar de:

$$0 < q = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\Delta t}\right] < 1$$

El valor intrínseco de una opción americana (1/2)

El valor intrínseco de una opción put americana en el momento t es:

$$(K - S(t))^+$$

El valor de una opción americana es el valor más grande entre su valor intrínseco y el valor esperado de su valor intrínseco en el siguiente periodo.

El valor intrínseco de una opción americana (2/2)

Para un periodo:

$$\begin{tikzcd}
t=0 & t=1 \\
 & (K-uS(0))^+ \\
(K-S(0))^+ \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (K-dS(0))^+
\end{tikzcd}$$

El valor de una opción americana (1/5)

- En fecha de vencimiento, el valor de un put americano es:

$$P^a(T) = \begin{cases} (K - uS(0))^+ & \text{con probabilidad } q \\ (K - dS(0))^+ & \text{con probabilidad } 1-q \end{cases}$$

- En t=0 el valor del put es:

$$P^a(0) = \max\left\{(K - S(0))^+, e^{-rT}\mathbb{E}[P^a(T)]\right\}$$

$$\mathbb{E}[P^a(T)] = q(K - uS(0))^+ + (1-q)(K - dS(0))^+$$

El valor de una opción americana (2/5)

Podemos extender el análisis un periodo más. El valor intrínseco evoluciona como:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
t=0 & t=1 & t=2 \\
 & & (K-u^2S(0))^+ \\
 & (K-uS(0))^+ \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
(K-S(0))^+ \arrow[ur] \arrow[dr] & & (K-udS(0))^+ \\
 & (K-dS(0))^+ \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & (K-d^2S(0))^+
\end{tikzcd}$$

El valor de una opción americana (3/5)

Cuando tenemos 2 periodos, en $t=T/2$:

$$P^a(T/2) = \max\left\{(K - S(T/2))^+, e^{-rT/2}\mathbb{E}[P^a(T)]\right\}$$

Cuando tenemos 2 periodos, en $t=0$:

$$P^a(0) = \max\left\{(K - S(0))^+, e^{-rT/2}\mathbb{E}[P^a(T/2)]\right\}$$

El valor de una opción americana (4/5)

Ejercicio

Supongamos que el valor de un activo es $32, que la tasa de interés (continua) es de 10% y que la volatilidad del activo es de 20%. Encuentra el precio de un put americano suscrito sobre este activo, con vencimiento en dos meses y precio de vencimiento de $34.

El valor de una opción americana (5/5)

Para cualesquiera número de periodos, el valor de una opción americana (por ejemplo un put) se calcula de forma recursiva:

$$\begin{aligned}
P^a(T) &= (K - S(T))^+ \\
P^a((n-1)\Delta t) &= \max\left\{(K - S((n-1)\Delta t))^+, e^{-r\Delta t}\mathbb{E}[P^a(T)]\right\} \\
P^a((n-2)\Delta t) &= \max\left\{(K - S((n-2)\Delta t))^+, e^{-r\Delta T}\mathbb{E}[P^a((n-1)\Delta t)]\right\} \\
&\vdots \\
P^a(0) &= \max\left\{(K - S(0))^+, e^{-r\Delta t}\mathbb{E}[P^a(\Delta T)]\right\}
\end{aligned}$$