

# Teoría de las Finanzas

Opciones Americanas

Alejandro Mosiño  
Universidad de Guanajuato  
v.2014

## Introducción

## Introducción (1/2)

Como hemos visto, una opción es americana si el propietario tiene la opción de ejercerla en cualquier momento dentro del intervalo  $[0, t]$ . Esto implica que la prima de una opción americana es, generalmente, más alta que la de una opción europea:

$$C^e \leq C^a \quad \text{y} \quad P^e \leq P^a$$

## Introducción(1/2)

De hecho, consideremos una opción call americana suscrita sobre un activo subyacente que paga dividendos. Si la opción se ejerce antes del periodo  $T$ :

- Nos hacemos del activo subyacente y recibiremos todos los dividendos que este pague
- Debemos pagar el precio de ejercicio,  $K$ , prematuramente. Esto implica que se pierden intereses por:

$$K(e^{r(T-t)} - 1)$$

- Perdemos el seguro que implica la posesión del call en caso que  $S(T) < K$ .

# Paridad call-put y otras desigualdades

## Paridad call-put (1/5)

Recordemos que las opciones europeas obedecen la fórmula de paridad:

$$P^e + S = C^e + Ke^{rT}$$

Las opciones americanas no satisfacen esta fórmula, pero sí satisfacen algunas desigualdades.

## Paridad call-put (2/5)

### Teorema

Supongamos que el valor de algún activo es  $S$ , que la tasa de interés libre de riesgo es  $r$ , y que  $C^a$  y  $P^a$  son los valores de un call y un put americanos, respectivamente, suscritos sobre este activo. Si el precio de ejercicio es  $K$  y la fecha de expiración es  $T$ , entonces:

$$C^a + K \geq S + P^a$$

**Demostración** (Tarea).

## Paridad call-put (3/5)

### Teorema

Supongamos que el valor de algún activo es  $S$ , que la tasa de interés libre de riesgo es  $r$ , y que  $C^a$  y  $P^a$  son los valores de un call y un put americanos, respectivamente, suscritos sobre este activo. Si el precio de ejercicio es  $K$  y la fecha de expiración es  $T$ , entonces:

$$S + P^a \geq C^a + Ke^{-rT}$$

**Demostración** (Tarea).

# Paridad call-put (4/5)

Combinamos ambos teoremas para encontrar que:

$$S - K \leq C^a - P^a \leq S - Ke^{-rT}$$

# Paridad call-put (5/5)

## Ejercicio

Supongamos que el precio de un activo es \$36 y que la tasa de interés libre de riesgo (con acumulación continua) es de 5.5%. Consideremos un call americano con vencimiento en 6 meses suscrito sobre este activo. El precio del call es de \$2.03 y su precio de vencimiento es de \$37. Calcula el rango de valores de no arbitraje para un put americano suscrito sobre el mismo activo subyacente y con el mismo precio de vencimiento.

# Call americano vs. Call europeo si el subyacente no paga dividendos

Sabemos que  $C^a \geq C^e$ , pero:

## Teorema

Sean  $C^a$  y  $C^e$  los precios de una opción americana y una opción europea, respectivamente, suscritos sobre el mismo activo subyacente. Si ambas opciones tienen el mismo precio y fecha de vencimiento y el activo subyacente no paga dividendos, entonces:

$$C^a = C^e$$

**Demostración** (Tarea).

# Put americano que no paga dividendos (1/2)

## Teorema

Consideremos un activo que no paga dividendos y cuyo precio es  $S$ . Un put americano suscrito sobre este activo, con precio de vencimiento  $K$ , fecha de vencimiento  $T$ , y precio  $P^a$  satisface:

$$(K - S)^+ \leq P^a \leq K$$

**Demostración** (Tarea).

## Put americano que no paga dividendos (2/2)

### Ejercicio

Consideremos un put americano con vencimiento en 12 meses. El put se suscribe sobre un activo que no paga dividendos, el cual tiene un precio de \$15. Si la tasa de interés libre de riesgo es de 3.25% anual y el precio de vencimiento de la opción es de \$470, ¿deberíamos ejercer la opción prematuramente?

*Nota.* Contrario a lo que sucede con los calls americanos, un put americano sí podría ejercerse antes de  $T$ .

## Call americano que no paga dividendos

### Teorema

Consideremos un activo que no paga dividendos y cuyo precio es  $S$ . Un call americano suscrito sobre este activo, con precio de vencimiento  $K$ , fecha de vencimiento  $T$ , y precio  $C^a$  satisface:

$$(S - Ke^{-rT})^+ \leq C^a < S$$

**Demostración** (Tarea).

## Variables que determinan el precio de una opción americana

## Variables que determinan el precio de una opción americana (1/3)

### Teorema

Sean  $C^a(T_1)$  y  $P^a(T_1)$  los valores de una opción call americana y de una opción put americana, respectivamente, ambas con vencimiento en  $T_1$ . Supongamos que  $T_1 < T_2$ . Entonces:

$$\begin{aligned} C^a(T_1) &\leq C^a(T_2) \\ P^a(T_1) &\leq P^a(T_2) \end{aligned}$$

**Demostración** (Tarea).

## Variables que determinan el precio de una opción americana (2/3)

### Teorema

Sean  $C^a(K_i)$  y  $P^a(K_i)$  los valores de una opción call americana y de una opción put americana, respectivamente, ambas con precio de vencimiento  $K_i$ . Supongamos que  $K_1 < K_2$ . Entonces:

$$\begin{aligned}C^a(K_2) &\leq C^a(K_1) \\P^a(K_1) &\leq P^a(K_2) \\C^a(K_1) - C^a(K_2) &\leq K_2 - K_1 \\P^a(K_2) - P^a(K_1) &\leq K_2 - K_1\end{aligned}$$

**Demostración** (Tarea).

## Variables que determinan el precio de una opción americana (3/3)

### Teorema

Sean  $C^a(S_i)$  y  $P^a(S_i)$  los valores de una opción call americana y de una opción put americana, respectivamente, suscritas sobre un subyacente con precio  $S_i$ . Supongamos que  $S_1 < S_2$ . Entonces:

$$\begin{aligned}C^a(S_1) &\leq C^a(S_2) \\P^a(S_2) &\leq P^a(S_1) \\C^a(S_2) - C^a(S_1) &\leq S_2 - S_1 \\P^a(S_1) - P^a(S_2) &\leq S_2 - S_1\end{aligned}$$

**Demostración** (Tarea).

## El árbol binomial para valuar opciones americanas

## Supuestos (1/2)

Como ejemplo, consideremos un put americano:

- Precio de vencimiento  $K$
- Fecha de expiración en  $T > 0$
- Suscrito sobre un subyacente con precio  $S(t)$  para  $t \in [0, T]$ .

Además, supongamos que la tasa de interés libre de riesgo,  $r$ , se acumula de forma continua y que el precio del subyacente evoluciona de acuerdo a un movimiento browniano geométrico con varianza  $\sigma^2$ .

# Supuestos (1/2)

Usaremos la calibración:

- En cada nodo, el precio del subyacente puede aumentar o disminuir de acuerdo a los factores  $u$  y  $d$ , respectivamente:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} > 1$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} < 1$$

- El activo subyacente tiene una probabilidad de aumentar de:

$$0 < q = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{\Delta t} \right] < 1$$

# El valor intrínseco de una opción americana (1/2)

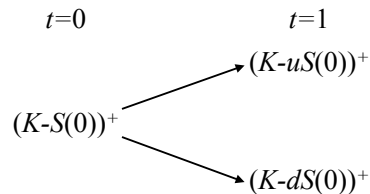
El valor intrínseco de una opción put americana en el momento  $t$  es:

$$(K - S(t))^+$$

El valor de una opción americana es el valor más grande entre su valor intrínseco y el valor esperado de su valor intrínseco en el siguiente periodo.

# El valor intrínseco de una opción americana (2/2)

Para un periodo:



# El valor de una opción americana (1/5)

- En fecha de vencimiento, el valor de un put americano es:

$$P^a(T) = \begin{cases} (K - uS(0))^+ & \text{con probabilidad } q \\ (K - dS(0))^+ & \text{con probabilidad } 1 - q \end{cases}$$

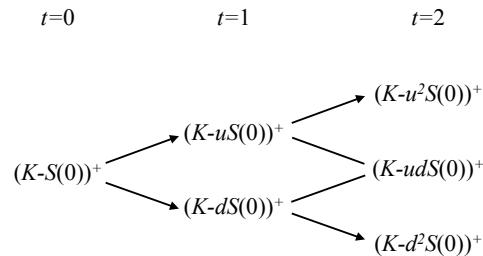
- En  $t=0$  el valor del put es:

$$P^a(0) = \max \{ (K - S(0))^+, e^{-rT} \mathbb{E}[P^a(T)] \}$$

$$\mathbb{E}[P^a(T)] = q(K - uS(0))^+ + (1 - q)(K - dS(0))^+$$

## El valor de una opción americana (2/5)

Podemos extender el análisis un periodo más. El valor intrínseco evoluciona como:



## El valor de una opción americana (3/5)

Cuando tenemos 2 periodos, en  $t=T/2$ :

$$P^a(T/2) = \max \left\{ (K - S(T/2))^+, e^{-rT/2} \mathbb{E}[P^a(T)] \right\}$$

Cuando tenemos 2 periodos, en  $t=0$ :

$$P^a(0) = \max \left\{ (K - S(0))^+, e^{-rT} \mathbb{E}[P^a(T/2)] \right\}$$

## El valor de una opción americana (4/5)

### Ejercicio

Supongamos que el valor de un activo es \$32, que la tasa de interés (continua) es de 10% y que la volatilidad del activo es de 20%. Encuentra el precio de un put americano suscrito sobre este activo, con vencimiento en dos meses y precio de vencimiento de \$34.

## El valor de una opción americana (5/5)

Para cualesquiera número de periodos, el valor de una opción americana (por ejemplo un put) se calcula de forma recursiva:

$$\begin{aligned}
 P^a(T) &= (K - S(T))^+ \\
 P^a((n-1)\Delta t) &= \max \left\{ (K - S((n-1)\Delta t))^+, e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[P^a(T)] \right\} \\
 P^a((n-2)\Delta t) &= \max \left\{ (K - S((n-2)\Delta t))^+, e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[P^a((n-1)\Delta t)] \right\} \\
 &\vdots \\
 P^a(0) &= \max \left\{ (K - S(0))^+, e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[P^a(\Delta T)] \right\}
 \end{aligned}$$